المحاضرة العاشرة نظري

3/12/2017

رموز كريستوفل من النوعين الأول والثاني:

وجدنا أن: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ متناظر بالنسبة للدليلين السفليين

(1) $\frac{\partial r^2}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial r}{\partial x^k}$

ولدينا: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ متناظر الدليلين

(2) $\left\langle \frac{\partial r}{\partial x^i}, \frac{\partial r}{\partial x^l} \right\rangle = g_{il}$

الآن باشتقاق الأخيرة بالنسبة للدليل x^j نجد:

(3) $\left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j}, \frac{\partial r}{\partial x^l} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial r}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^l \partial x^j} \right\rangle$ 1

$= \Gamma^k_{ij} \left\langle \frac{\partial r}{\partial x^k}, \frac{\partial r}{\partial x^l} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial r}{\partial x^k} \right\rangle \Gamma^k_{lj} \frac{\partial r}{\partial x^k}$ 2

$= \Gamma^k_{ij} g_{kl} + \Gamma^k_{lj} g_{ki} = \Gamma_{l,ij} + \Gamma_{i,lj}$

أي أن:

(4) $\partial_j g_{il} = \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} = \Gamma_{l,ij} + \Gamma_{i,lj}$

بتدوير الأدلة في العلاقة الأخيرة نحصل على العلاقة:

(lij)
(jli)
(ijl)

(5) $\partial_i g_{lj} = \Gamma_{j,li} + \Gamma_{l,ji}$

وبتدوير الأدلة مرة ثانية نجد:

(6) $\partial_l g_{ji} = \Gamma_{i,lj} + \Gamma_{j,li}$

$(4)+(5)-(6) = \partial_j g_{il} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ij} = 2\Gamma_{l,ij}$

أي أن:

(7) $\boxed{\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}\right)}$

تسمى الأعداد $\Gamma_{l,ij}$ مركبات كريستوفل من النوع الأول وتعطى بدلالة مشتقة التنسور المتري في العلاقة (7).

/ /

بوضع الدليل في (7) نجد:

$$\Gamma_{ij}^{l} = \Gamma_{kij}\, g^{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij})$$

تسمى الأعداد Γ_{ij}^{l} مركبات كريستوفل من النوع الثاني وطبعاً تتعلق كما هو واضح بدلالة التنسورين g_{ij} , g^{ij} .

- **أمثلة:** رموز كريستوفل في النظام الإحداثي الديكارتي:

نعلم أن $g_{ij} = \delta_j^i$ في النظام الاحداثي الديكارتي.

وبالتالي $\partial_l g_{ij} = 0$ مهما يكن l, i, j ،

لذلك رموز كريستوفل من النوعين معدومة في النظام الديكارتي.

- أما في النظام الاحداثي المنحني القطبي $(\overset{1}{\rho}, \overset{2}{\theta})$.

وهنا أن:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = g_{ij} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{1,11} = \frac{1}{2} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{1,21} = \frac{1}{2} (\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{12} - \partial_1 g_{21}) = \frac{1}{2} \frac{\partial 1}{\partial \theta} = 0$$

$$\Gamma_{1,22} = \frac{1}{2} (\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \rho^2}{\partial \rho} = -\rho$$

$$\Gamma_{2,12} = \frac{1}{2} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) = \rho$$

$$\Gamma_{2,12} = \rho \ , \ \Gamma_{1,22} = -\rho$$

والبقية معدومة. (تحسب بطريقة مشابهة ونجد هذه المركبات معدومة).

/ /

- لنحسب رموز كريستوفل من النوع الثاني في النظام الإحداثي القطبي:

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{k1} \left(\partial_2 g_{k2} + \partial_2 g_{k1} - \partial_k g_{22} \right) \quad ; k = 1, 2$$

وباعتبار أن $g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$ في الإحداثي القطبي يكون:

من أجل $k = 1$ ومن أجل $k = 2$:

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}\left[g^{11}\left(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22} \right) + g^{21}\left(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 . (-2\rho) \right] = -\rho$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma_{\alpha,12}\, g^{2\alpha} = \Gamma_{1,12}\, g^{21} + \Gamma_{2,12}\, g^{22} = \frac{1}{\rho^2} . \rho = \frac{1}{\rho}$$

$\alpha = 1, 2$

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma_{\alpha,22}\, g^{\alpha 1} = \Gamma_{1,22}\, g^{11} + \Gamma_{2,22}\, g^{21} = -\rho$$

- في الإحداثيات الكروية (ρ, θ, φ)

وجدنا أن

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{1,22} = \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22} \right) = -\rho$$

$$\Gamma_{3,13} = \frac{1}{2}\left(\partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{13} - \partial_3 g_{13} \right) = \rho \sin^2\theta$$

$$\Gamma_{3,23} = \frac{1}{2}\left(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\rho^2 \sin\theta \cos\theta\right) = \rho^2 \sin\theta\cos\theta$$

بصورة مشابهة نجد بقية المركبات :

$$\Gamma_{3,23} = \rho^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\Gamma_{1,33} = -\rho \sin^2\theta$$

$$\Gamma_{2,12} = \rho$$

ومركبات كريستوفل من النوع الثاني :

$$\Gamma^1_{22} = g^{1k}\Gamma_{k,22} = g^{11}\Gamma_{1,22} + g^{12}\Gamma_{2,22} + g^{13}\Gamma_{3,22}$$

$k = 1,2,3$

تنعدم لأن ... الصفر

$$g^{ij} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^1_{22} = 1(-\rho) = -\rho$$

$$\Gamma^1_{33} = \Gamma_{\alpha,33}\, g^{\alpha 1} = \Gamma_{1,33}\, g^{11} + \Gamma_{2,33}\, g^{21} + \Gamma_{3,33}\, g^{31}$$

$$= -\rho \sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{\rho} \quad , \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{\rho} \quad , \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^3_{23} = \cot g\, \theta$$

وبقية المركبات معدومة .

المشتق موافق التغير لتنسور ما :

المشتق لتنسور هو تعميم لمفهوم مشتقة دالة التي تعرفنا عليها في سنوات سابقة .

الآن : بفرض أن f $f(x,y,z)$ دالة سلمية عندئذٍ نعطي مفهوم المشتق موافق التغير لـ f (والتي سنرمز لها بـ ∇f). ①

مع مشتقة الدالة f بالنسبة لدليل ما .

$$\nabla_k f = \frac{\partial f}{\partial x^k} , k = 1,2,3 \qquad \nabla_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} , \ldots$$

/ /

② بفرض أن (T^i) تنسور من النوع $\binom{1}{0}$ عندئذٍ المشتق موافق التغير للتنسور T^i بالنسبة لدليل ما x^k.
يعرف بالشكل الآتي:

$$T^i_{;k} = \nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma^i_{\alpha k} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

فاصلة من أجل ∇

③ - إذا كان (T_i) تنسوراً من النوع $\binom{0}{1}$ فإن:

$$\nabla_k T_i = T_{i;k} = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - T_\alpha \Gamma^\alpha_{ik}$$

④ في الحالة العامة المشتق موافق التغير لتنسور ما من النوع $\binom{p}{q}$.

$$\nabla_k T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \frac{\partial T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}{\partial x^k} + T^{\alpha i_2 \dots i_p} \Gamma^{i_1}_{\alpha k}$$
$$+ \dots + T^{i_1 \dots \alpha}_{j_1 \dots j_q} \Gamma^{i_p}_{\alpha k} - T^{i_1 \dots i_p}_{\alpha j_2 \dots j_q} \Gamma^\alpha_{j_1 k} - \dots - T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots \alpha} \Gamma^\alpha_{j_q k}$$

س: مشتق تنسور هل هو تنسور وإذا كان تنسوراً ما هو نوعه:

مبرهنة: إن المشتق موافق التغير لتنسور من النوع $\binom{p}{q}$ هو تنسور من النوع $\binom{p}{q+1}$ بدون برهان

ملاحظة: لا يوجد مشتق مخالف التغير $\nabla_k(f)^{\binom{0}{0}} =$

مثال: ليكن التنسور $T\binom{i}{j} = (T^1_1 = \rho, T^2_2 = 0, T^1_2 = T^2_1 = \frac{1}{\rho})$ في الإحداثيات القطبية.

أوجد:

$$\nabla^1_{2,1} = \nabla_1 T^1_2 = \nabla_\rho T^1_2$$

$$T^1_{2,1} = \partial_1 T^1_2 + T^\alpha_2 \Gamma^1_{2\alpha} - T^1_\alpha \Gamma^\alpha_{21}$$

/ /

$\Gamma^{2}_{12} = \frac{1}{\rho}$ ، $\Gamma^{1}_{22} = -\rho$ والبقية معدومة.

$$T^{1}_{2;1} = \frac{-1}{\rho^2} + T^{1}_{2}\Gamma^{1}_{21} + T^{2}_{2}\Gamma^{1}_{22} - T^{1}_{1}\Gamma^{1}_{21} - T^{1}_{2}\Gamma^{2}_{21}$$

$$= -\frac{1}{\rho^2} - 0 - \frac{1}{\rho^2} = -\frac{2}{\rho^2}$$

تمرين: احسب $T^{2}_{1;2}$

خواص عملية الاشتقاق مواغم التغير:

1) $\nabla_k(\lambda T + \mu S) = \lambda \nabla_k T + \mu \nabla_k S$

2) $\nabla_k (T \cdot S) = (\nabla_k T) \cdot S + T(\nabla_k S)$

3) $\nabla_k g_{ij} = \nabla_k \delta^{i}_{j} = \nabla_k g^{ij} = 0$

حيث (g_{ij}) تنسور متري في نظام احداثي ما.

سنثبت الخاصة الأخيرة:

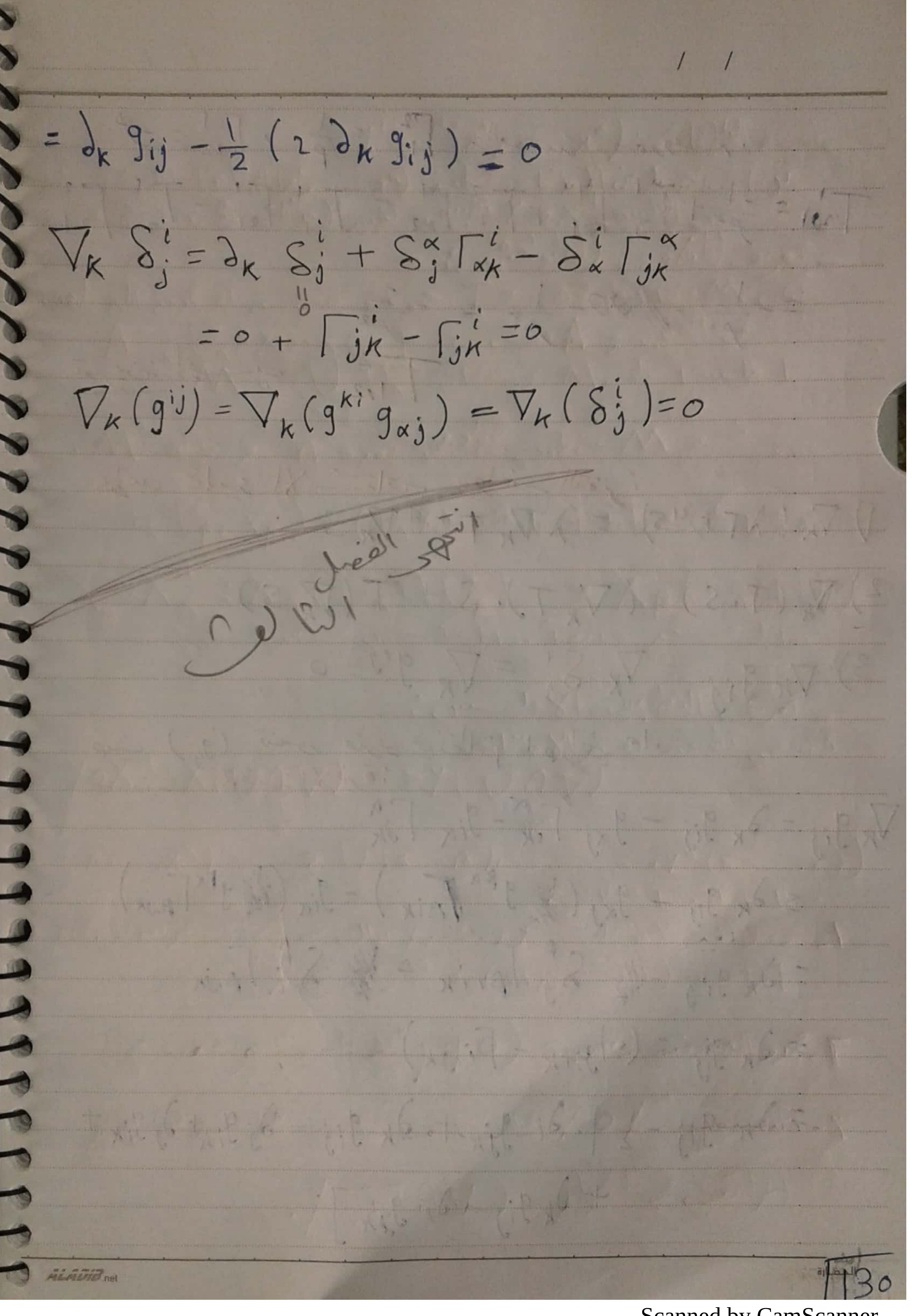
$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ik} - g_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{jk}$$

$$= \partial_k g_{ij} - g_{\alpha j}(g^{\beta\alpha}\Gamma_{\beta,ik}) - g_{i\alpha}(g^{\beta\alpha}\Gamma_{\beta,jk})$$

$$= \partial_k g_{ij} - \delta^{\beta}_{j}\Gamma_{\beta,ik} - \delta^{\beta}_{i}\Gamma_{\beta,jk}$$

$$= \partial_k g_{ij} - (\Gamma_{j,ik} - \Gamma_{i,jk})$$

$$= \partial_k g_{ij} - \frac{1}{2}\left[\partial_i g_{jk} + \partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} + \partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}\right]$$



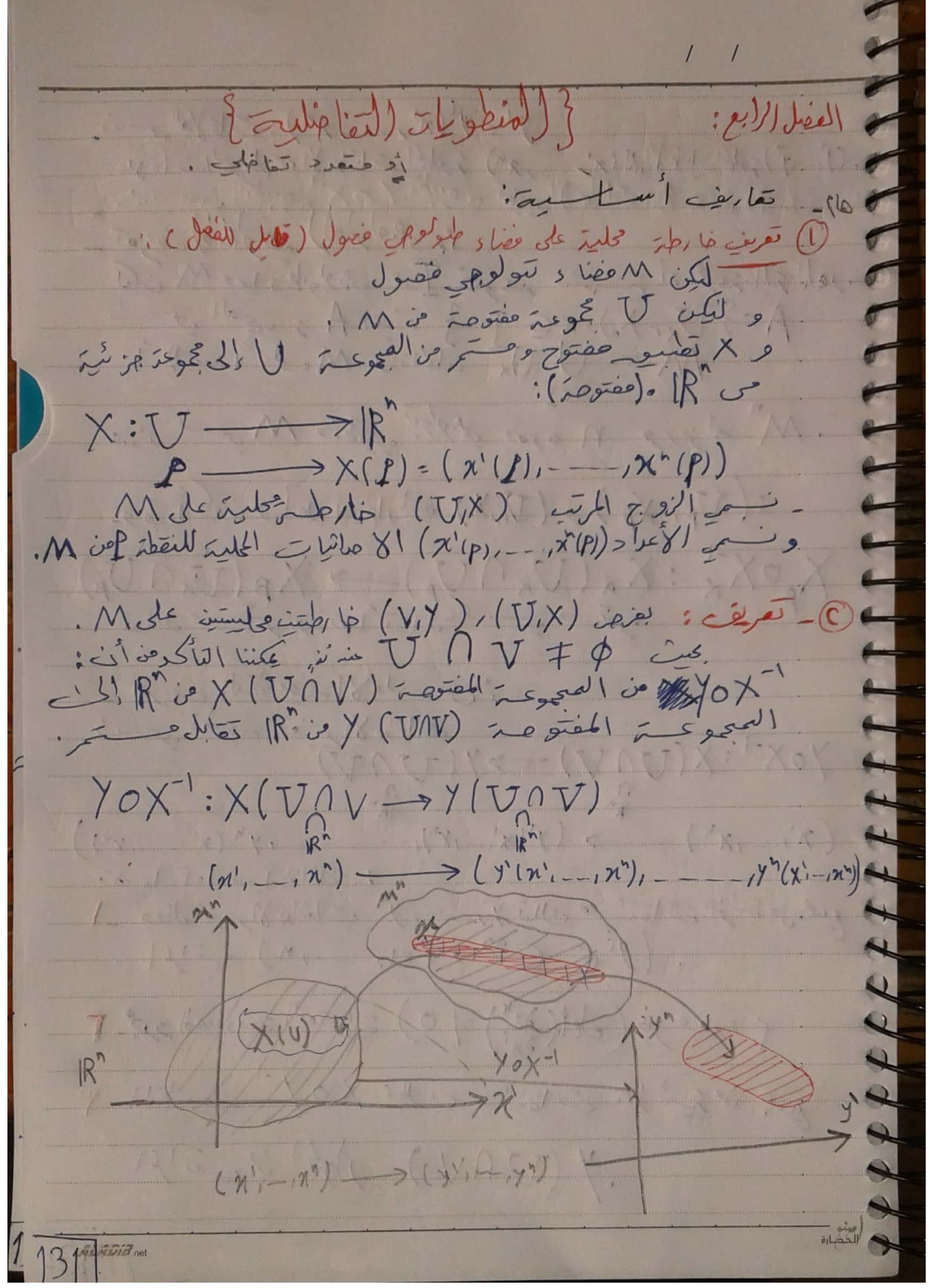
$$= \partial_k g_{ij} - \frac{1}{2}(2\,\partial_k g_{ij}) = 0$$

$$\nabla_k \delta^i_j = \partial_k \delta^i_j + \delta^\alpha_j \Gamma^i_{\alpha k} - \delta^i_\alpha \Gamma^\alpha_{jk}$$

$$= 0 + \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = 0$$

$$\nabla_k (g^i{}_j) = \nabla_k (g^{ki} g_{\alpha j}) = \nabla_k (\delta^i_j) = 0$$

انتهى الفصل الثالث



/ /

الفصل الرابع: {المنطويات التفاضلية}

أو متعدد تفاضلي.

هام - تعاريف أساسية:

① تعريف خارطة محلية على فضاء طوبولوجي فصول (قابل للفصل):

لتكن M فضاء تبولوجي فصول

و لتكن U مجموعة مفتوحة من M،

و X تشاكل مفتوح و مستمر من المجموعة U إلى مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ (مفتوحة):

$$X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$p \longrightarrow X(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$$

- نسمي الزوج المرتب (U,X) خارطة محلية على M

و نسمي الأعداد $(x^1(p), \ldots, x^n(p))$ الاحداثيات المحلية للنقطة p من M.

② - تعريف: بفرض (U,X) ، (V,Y) خارطتين محليتين على M.

بحيث $U \cap V \neq \phi$ عندئذ يمكننا التأكد من أن:

$Y\circ X^{-1}$ من المجموعة المفتوحة $X(U\cap V)$ من $\mathbb{R}^n$ إلى المجموعة المفتوحة $Y(U\cap V)$ من $\mathbb{R}^n$ تقابل مستمر.

$$Y\circ X^{-1} : \underset{\mathbb{R}^n}{X(U \cap V)} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{Y(U\cap V)}$$

$$(x^1, \ldots, x^n) \longrightarrow (y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^n))$$

- نسمي العلاقات : $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$

علاقات التحويل من الإحداثيات المحلية $(x^1, \dots, x^n)$ إلى الإحداثيات المحلية $(y^1, \dots, y^n)$.

- نسمي التطبيق $Y \circ X^{-1}$ تطبيق تغيير الإحداثيات من $(x^1, \dots, x^n)$ إلى $(y^1, \dots, y^n)$

- تعريف المنطوي التبولوجي:

ليكن M فضاء طبولوجي و I مجموعة منتهية أو مجموعة قابلة للعد.

نسمي المجموعة A حيث $A = \{ (U_\alpha, X_\alpha), \alpha \in I \}$

أطلساً على M وإذا كان $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

عندئذٍ نسمي M منطوي تبولوجي بعده n ونرمز له M^n.

- وضعاً يكون من أجل أي خارطتين (U_α, X_α) و (U_β, X_β):

$$X_\beta \circ X_\alpha^{-1} : X_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow X_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

تقابل مستمر وأيضاً تقابل عكسي مستمر.

- تعريف التطبيق الأملس:

نسمي تطبيق تغيير الإحداثيات

$$Y \circ X^{-1} : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{X(U \cap V)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{Y(U \cap V)}}$$

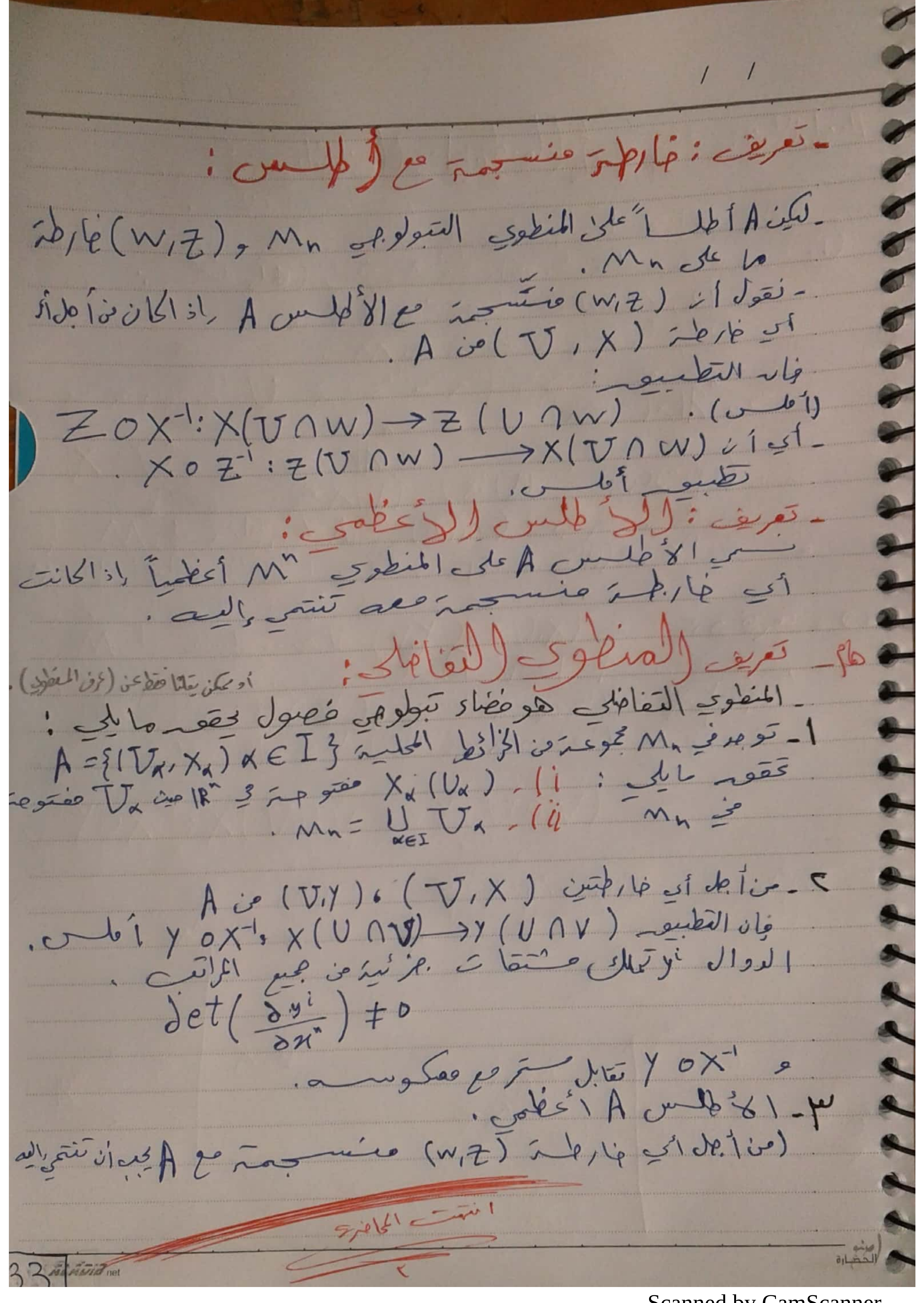
$$(x^1, \dots, x^n) \longrightarrow (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n))$$

تطبيقاً أملساً إذا كانت:

١- دوال تغيير الإحداثيات $y^1, \dots, y^n$ تملك مشتقات جزئية من جميع المراتب $(y^i \in C^\infty ; i = 1, \dots, n)$.

٢- محدد المصفوفة اليعقوبية $\left(\det\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right) \neq 0 \right)$ غير معدوم

٣- التطبيق $X \circ Y^{-1}$ يملك مشتقات جزئية من جميع المراتب في الجوار $Y(U \cap V)$.



/ /

- تعريف: خارطة منسجمة مع أطلس:

- لتكن A أطلساً على المنطوي التبولوجي M_n و (W, Z) خارطة ما على M_n.

- نقول أن (W, Z) منسجمة مع الأطلس A إذا كان من أجل أي خارطة (V, X) من A.
فإن التطبيق:
$Z \circ X^{-1} : X(V \cap W) \to Z(V \cap W)$. (أطلس)
- أي أن $X \circ Z^{-1} : Z(V \cap W) \to X(V \cap W)$.
تطبيق أطلس.

- تعريف: الأطلس الأعظمي:
نسمي الأطلس A على المنطوي M^n أعظمياً إذا كانت أي خارطة منسجمة معه تنتمي إليه.

هام - تعريف المنطوي التفاضلي:
أو يمكن تعلما قطاعين (عرف المنطوي).
- المنطوي التفاضلي هو فضاء تبولوجي فصول يحقق مايلي:
١- توجد في M_n مجموعة من الخرائط المحلية $A = \{(V_\alpha, X_\alpha) \; \alpha \in I\}$
تحقق مايلي: i- $X_\alpha(U_\alpha)$ مفتوحة في IR^n حيث V_α مفتوحة في M_n
ii- $M_n = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$.

٢- من أجل أي خارطتين (V, X)، (V, Y) من A
فإن التطبيق $Y \circ X^{-1} : X(U \cap V) \to Y(U \cap V)$ أطلس.
الدوال y^i تملك مشتقات جزئية من جميع المراتب.
$$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^n}\right) \neq 0$$
و $Y \circ X^{-1}$ تقابل مستمر مع معكوسه.
٣- الأطلس A أعظمي.
(من أجل أي خارطة (W, Z) منسجمة مع A يجب أن تنتمي إليه)

انتهت المحاضرة

٢